



a = 210 mm

90°

b = 297 mm

## Mathematik lehren und lernen

Ein zentrales Thema in der Bildungsdiskussion ist der Unterricht an deutschen Schulen. Auch Lehrerinnen und Lehrer im Fach Mathematik gehen hier neue Wege; die Lehrmethoden und -materialien müssen sich kritischen Bewertungen unterziehen. Fest steht: Sowohl bei der Art der Vermittlung von mathematischen Inhalten als auch bei der gezielten Fortbildung von Lehrern gibt es spannende Entwicklungen. Daher liegt ein Hauptaugenmerk im Jahr der Mathematik neben den Aus- und Weiterbildungsmöglichkeiten rund um Mathematik vor allem auf der Didaktik. Schülerinnen und Schüler lernen heute selbständiger und entwickeln beim Lernen, wie man inzwischen weiß, individuelle kognitive Strukturen, konstruieren Wissen eigenständig.

Dieser Erkenntnis hat auch die moderne Hirnforschung Vorschub geleistet. Neurobiologen haben eindrucksvoll gezeigt, dass schon die Wahrnehmung an sich ein hochgradig aktiver Vorgang ist. Wissen lässt sich nicht durch bloße Informationsweitergabe eindeutig vermitteln, so der Befund. Auch die Vorerfahrungen und Vorstellungen der Lernenden spielen beim Lernprozess eine große Rolle. In diesem Sinne stellt das Fach Mathematik eine besondere kognitive und emotionale Herausforderung für die Akteure dar. Entsprechend wichtig ist es für die Lehrkräfte, analysieren zu können, wie und mit welchen Hilfsmitteln sie ihre Schüler am besten erreichen. Außerdem müssen die Lernumgebungen so gestaltet sein, dass sie Freiräume, Möglichkeiten und Anlässe für aktive, eigenständige Konstruktionen von Wissen geben.

### *Defizite erkennen und beheben*

Die Entwicklung des Mathematikunterrichts ist ein Prozess, der sich in einem Kreislauf vollzieht: Ausgehend von der Analyse (zum Beispiel mit Hilfe der Studie „Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie“ (TIMSS) und des „Programme for International Student Assessment“ – besser bekannt als PISA-Studie) werden Defizite festgestellt und Vorschläge zu deren Überwindung unterbreitet, die idealerweise in konkreter Unterrichtsentwicklung münden. Die Ergebnisse wiederum müssen ihren Niederschlag in der Lehreraus- und -fortbildung finden. Eine Auswahl aktueller Handlungsfelder stellen wir im Folgenden dar:

### *Verzahnung von Fachwissenschaft und Fachdidaktik*

Um die oben beschriebenen Lernprozesse kompetent anregen und begleiten zu können, sollen künftige Lehrer die Gelegenheit erhalten, von Anfang an das Fach Mathematik in enger Verzahnung mit einer praxisbezogenen Didaktik und erziehungswissenschaftlichen Elementen zu erfahren. Diesem Ziel dienen eine Reihe von Projekten und Erprobungen.



a = 210 mm

90°

b = 297 mm

### *Instruktion und Konstruktion*

Moderner Mathematikunterricht besteht aus verschiedenen Unterrichtsformen, die Lehrerinnen und Lehrer je nach den pädagogischen Zielen einsetzen. Dazu gehören nach wie vor die direkte Unterweisung, aber auch offener Unterricht, Projektarbeit und Teamarbeit.

Ein Beispiel für sehr schülerbezogenes Lernen ist das Führen von *Lerntagebüchern*. Dabei dokumentiert der Schüler alle Schritte des Lernvorgangs, etwa die Assoziationen, die ein bestimmtes Thema bei ihm weckt, Überlegungen, die er zur Lösung einer bestimmten Aufgabe anstellt, bis hin zur Entscheidung für diesen oder jenen Lösungsansatz und den Weg zum Endergebnis. Dieses Vorgehen hält den Schüler dazu an, sich seiner Schritte auf dem Weg zum Ziel bewusst zu werden; und es gibt dem Lehrer einen guten Einblick in individuelle Vorkenntnisse, Überlegungen und Lösungswege. Beide Seiten lernen sich auf diesem dialogischen Weg besser kennen, die Nachhaltigkeit des Lernens wird verbessert.

Ein weiteres Beispiel sind *offene Aufgaben*. Zwar ziehen gute Aufgaben nicht automatisch einen guten Unterricht nach sich, aber sie sind eine wichtige Voraussetzung dafür. Hierbei unterstützen offene statt geschlossene Aufgaben den Lernerfolg erheblich. Ein Beispiel für eine geschlossene Aufgabe: „Ein Bierdeckel hat einen Durchmesser von 107 Millimetern. Wie groß ist sein Umfang?“ Die Lösung erfordert lediglich das Anwenden der Kreis-Formel „Umfang = Durchmesser mal Pi“. Das Lösungsverfahren ist in der Aufgabenstellung vorgezeichnet, es gibt nur eine „gültige Wahl“.

Ein offenes Pendant zur geschlossenen Bierdeckelaufgabe stellt folgende PISA-Aufgabe der OECD aus dem Jahr 2000 dar, bei der den Schülern eine grobe Karte der Antarktis mit dazugehörigem Maßstab ausgehändigt wurde: „Hier siehst du eine Karte der Antarktis. Schätze die Fläche der Antarktis, indem du den Maßstab der Karte benutzt. Schreibe deine Rechnung auf und erkläre, wie du zu deiner Schätzung gekommen bist. (Du kannst in der Karte zeichnen, wenn dir das bei deiner Schätzung hilft.)“ Diese Aufgabe kommt Problemen nahe, wie sie im späteren Leben auf die Schüler zukommen könnten: Das Erinnern an eine Jahre zuvor gelernte Formel ist weder möglich noch unbedingt hilfreich. Eine eindeutige „richtige“ Lösung ist nicht zu erwarten und auch nicht erforderlich, der Lösungsweg ist offen: Man kann die Fläche durch Kreise, Rechtecke oder komplizierte zusammengesetzte Figuren annähern. Und man kann den Kontinent nur teilweise mit einer passenden und zugleich einfach zu berechnenden Figur so überdecken, dass überstehende und zu viel überdeckte Teile sich nach Augenmaß aufheben.

a = 210 mm

90°

b = 297 mm

### *Kompetenzorientierte Diagnose*

Eine wichtige Rolle kommt der kompetenzorientierten Diagnose zu. Sie hat das Ziel, individuelle Voraussetzungen, Lernwege und Fähigkeiten, aber auch Grenzen der Schülerinnen und Schüler im Bereich mathematischer Kompetenzen, wie sie in den Kernlehrplänen beschrieben werden, zu erkennen. Dies bildet die Grundlage für die Einschätzung des individuellen Lern- und Förderbedarfs der Schülerinnen und Schüler im Bereich der Mathematik. Dabei kommt auch der Erforschung von Rechenschwäche (Dyskalkulie) eine wichtige Rolle zu. Wesentliche Vorläuferfähigkeiten und -defizite sollten bereits im Kindergartenalter erhoben werden, so dass eine frühe Förderung die Auswirkungen auf die Schullaufbahnbiografie mildert beziehungsweise eine Rechenschwäche gar nicht erst auftritt.

### **Projekte zur Aus- und Weiterbildung von Mathematiklehrern**

Wie oben beschrieben, gibt es zahlreiche Ansätze zur Verbesserung der Mathematikdidaktik. Sie haben bisher aber geringe Auswirkungen auf bestehende Ausbildungsmodelle. Daher sollen zahlreiche öffentlich und privat geförderte Projekte – vor allem von Stiftungen – neue und verbesserte Unterrichtsformen fördern. Ein besonderes Augenmerk gilt dabei der Lehreraus- und -fortbildung. Die folgenden Projekte wurden und werden von Forschungseinrichtungen und Didaktikgesellschaften betreut und evaluiert.

### *Kinder rechnen anders*

„Wenn es um die Lösung von Matheaufgaben geht, denken Kinder oft anders als Erwachsene“, erklärt Christoph Selter, Professor am Institut für Entwicklung und Erforschung des Mathematikunterrichtes (IEEM) an der Technischen Universität Dortmund. Bittet man beispielsweise Drittklässler, auszurechnen, wie viele Plätze in einem 216-Plätze-Kinosaal noch frei sind, wenn bereits 148 Personen im Saal sitzen, lassen sich bei 27 Schülern 22 verschiedene Herangehensweisen beobachten. Wohlgermerkt: Alle führen zu richtigen Lösungen. Und weil dieser Gedanke entscheidende Impulse für den Unterricht gibt und deshalb wichtig für alle zukünftigen Lehrer ist, rief Selter, früher selbst Mathematiklehrer, das von der Deutschen Telekom Stiftung finanzierte Forschungsprojekt „Kinder rechnen anders“ ins Leben. Selter entwickelt und evaluiert am Beispiel der Grundschule Materialien, die die Lehramtsstudenten in die Lage versetzen sollen, Denkwege von Kindern besser zu verstehen. Damit sie später als Lehrer nicht Lösungswege nach Schema F einfordern, sondern individuell auf die kindlichen Denkwege eingehen können.

An der Universität Bremen arbeitet Heinz-Otto Peitgen, international renommierter Mathematikprofessor, ebenfalls mit Unterstützung der Deutschen Telekom Stiftung an der Primarlehrerausbildung. Seine Erfahrung: Viele der Lehramtsstudenten haben zu Beginn des Studiums geringen bis keinen Zugang zur Mathematik. „Die Frustration ist entsprechend groß, wenn die Studierenden in ihren ersten Mathematikvorlesungen über Analysis sitzen und das, was der Dozent im Frontalunterricht vorträgt, in keinerlei Beziehung zu dem Stoff bringen können, den sie später einmal Grundschulern vermitteln wollen“, so Peitgen. Sein Mittel der Wahl: „Hands on“-Mathematik – Mathematik zum Anfassen mit Experimenten, die Zusammenhänge veranschaulichen und für Aha-Effekte sorgen. Neben den Vorlesungen werden in Workshops beispielhafte Lernsituationen geschaffen, mit denen die Studierenden moderne Unterrichtskonzepte praktisch erleben.

#### *Mathematik Neu Denken*

„Mathematik Neu Denken“ ist ein Didaktikprojekt, das der Siegener Mathematikprofessor Rainer Danckwerts vor drei Jahren gemeinsam mit seinem Fachkollegen Professor Albrecht Beutelspacher von der Universität Gießen ins Leben rief. Beutelspacher ist zudem der Gründer des weltweit ersten interaktiven Mathematikmuseums, des Gießener Mathematikums. Gemeinsam mit seinem Kollegen suchte er nach Wegen, um Studierende für das Gymnasiallehramt gezielt auf den Lehrerberuf vorzubereiten. Danckwerts hatte Lehramtsstudierende für das Gymnasium befragt und dabei festgestellt, dass deren Ausbildung auch deshalb problematisch ist, weil sie sie gemeinsam mit den Diplom- beziehungsweise Bachelor-Mathematikern beginnen müssen. „Und diese Universitätsmathematik ist für die meisten Lehramtsstudenten erst einmal ein „Kulturschock“. Denn sie hat kaum etwas mit der Schulmathematik zu tun“, beobachtete Danckwerts. Eben hier setzt das Projekt „Mathematik Neu Denken“ an: Es wagt den Versuch, die fachliche Ausbildung angehender Gymnasiallehrer im ersten Studienjahr grundlegend neu zu orientieren. Ziel des Projektes, dessen Anschubfinanzierung die Deutsche Telekom Stiftung übernommen hat: Die wissenschaftliche Mathematik, die Schulmathematik, die Geschichte und die Didaktik der Mathematik werden von Anfang an konsequent miteinander verzahnt – dabei hilft nicht zuletzt auch die enge Zusammenarbeit mit dem Gießener Mathematikum.

#### *Mathematik Anders Machen*

Wie begeistert man pubertierende Jugendliche für quadratische Funktionen, Differenzialrechnung, Stochastik oder Geometrie? Ein Patentrezept gibt es nicht. Aber: „Man muss den Schülerinnen und Schülern zeigen, wie spannend und schön Mathematik sein kann und wie viel Anwendung sie in unserem Alltag findet“, sagt Wilfried Herget, Professor für Mathematik und ihre Didaktik an der Universität Halle-Wittenberg, der seit knapp einem Jahr gemeinsam mit der

Leipziger Mathematiklehrerin Ines Petzschler für das Lehrer-Fortbildungsprojekt „Mathematik Anders Machen“ durch ganz Deutschland reist. Ihre „Mission“ und die von rund 30 anderen solcher Lehrer-Wissenschaftler-Tandems ist: Lehrer in Tagesseminaren zu schulen und so zu neuen Ideen für den Unterricht zu inspirieren.

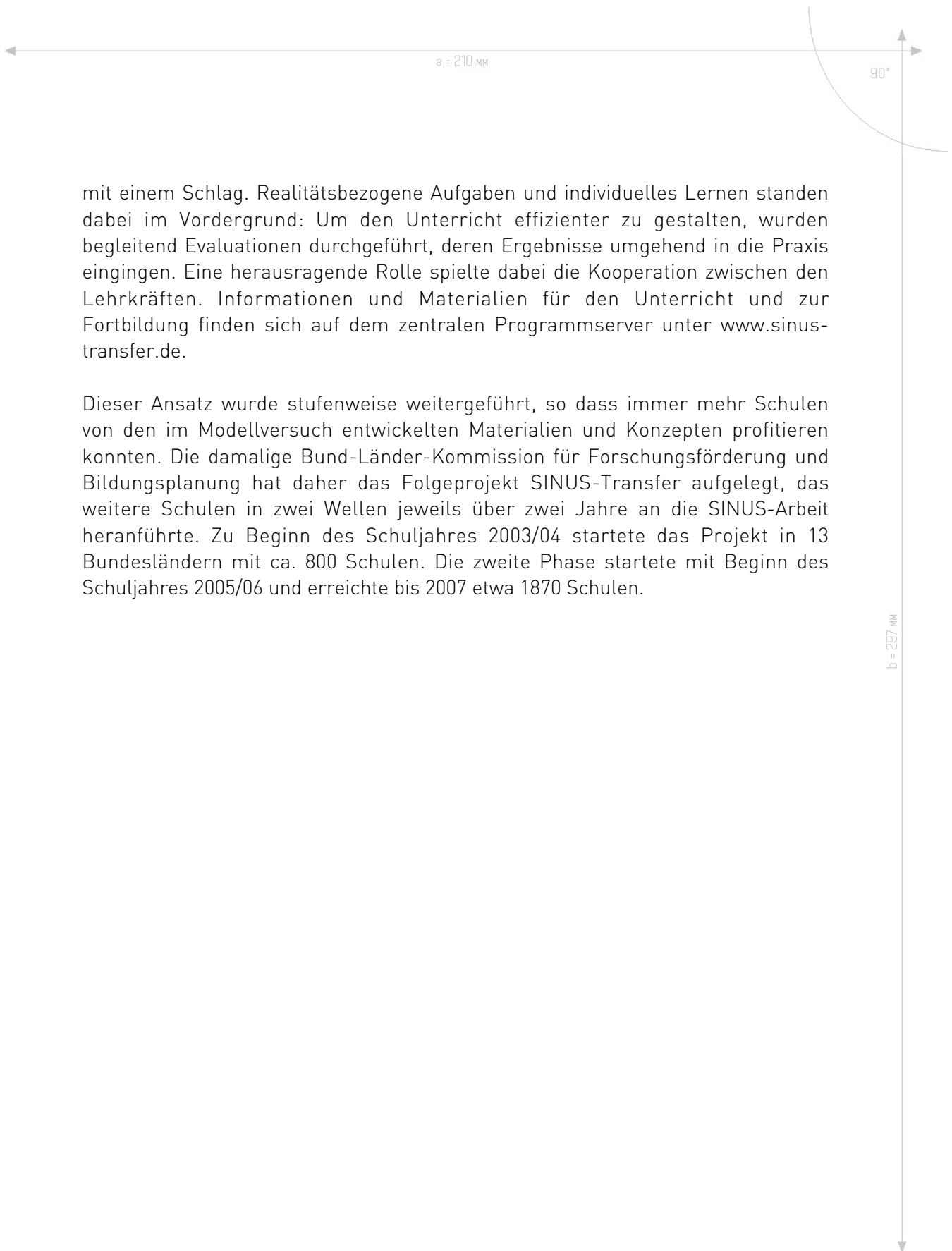
Eine Grundlage für das Seminarangebot von „Mathematik Anders Machen“ bildet eine Umfrage des Zentrums für empirische pädagogische Forschung (zefp) an der Uni Koblenz-Landau unter 1700 Mathematikpädagogen (Januar 2007). Die meisten gaben an, sie hätten gerne mehr Emotionen und Experimentierlust in ihrem Unterricht. Die Nachfrage nach den bundesweit stattfindenden Kursen, die von der Deutschen Telekom Stiftung gemeinsam mit der Deutschen Mathematiker-Vereinigung unterstützt und finanziert werden, ist groß. Sie tragen „alltagstaugliche“ Titel wie „Funktionen haben viele Gesichter“ oder „Geometrie unplugged“ – allein das macht offenbar viele Pädagogen neugierig. Das Besondere: Interessierte Lehrer können auch eigene Seminarthemen vorschlagen.

#### *Mathekoffer*

Um bei Lehrern und Schülern die Experimentierlust zu wecken und zu unterstützen, wurde anlässlich des Jahres der Mathematik der Mathekoffer entwickelt. Die ab Ende März bei den Verlagen Erhard Friedrich/Ernst Klett erhältliche Materialsammlung wurde auf der didacta 2008 in Stuttgart vorgestellt. Der Mathekoffer soll Lehrerinnen und Lehrer dabei unterstützen, ihren Unterricht in der Sekundarstufe I schülerorientiert zu gestalten. Ob Geometrie oder Bruchrechnung, ob Stochastik oder Funktionen – der Mathekoffer liefert viele Anregungen für anschaulichen und alltagsbezogenen Mathematikunterricht. Der Koffer entstand nach einer Idee des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU). Mit Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn und Andreas Büchter von der Technischen Universität Dortmund wurden zwei renommierte Mathematikdidaktiker für die Konzeption des Koffers gewonnen. Die Deutsche Telekom Stiftung unterstützt die Herstellung und bundesweite Verbreitung der Lehr- und Arbeitsmaterialien. Lehrerinnen und Lehrer, die den Koffer im Unterricht einsetzen möchten, erhalten in kostenlosen Fortbildungen praktische Tipps.

#### *SINUS-Projekt*

Die „Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie“ (TIMSS) hatte gezeigt, dass deutsche Schülerinnen und Schüler deutliche Schwächen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Verständnis haben. Als Reaktion darauf wurde 1998 der bundesweit angelegte Modellversuch SINUS ins Leben gerufen. Das Ziel: die Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts (SINUS). Die Methode: Unterrichtsentwicklung von innen in kleinen Schritten statt Revolution von außen



mit einem Schlag. Realitätsbezogene Aufgaben und individuelles Lernen standen dabei im Vordergrund: Um den Unterricht effizienter zu gestalten, wurden begleitend Evaluationen durchgeführt, deren Ergebnisse umgehend in die Praxis eingingen. Eine herausragende Rolle spielte dabei die Kooperation zwischen den Lehrkräften. Informationen und Materialien für den Unterricht und zur Fortbildung finden sich auf dem zentralen Programmserver unter [www.sinus-transfer.de](http://www.sinus-transfer.de).

Dieser Ansatz wurde stufenweise weitergeführt, so dass immer mehr Schulen von den im Modellversuch entwickelten Materialien und Konzepten profitieren konnten. Die damalige Bund-Länder-Kommission für Forschungsförderung und Bildungsplanung hat daher das Folgeprojekt SINUS-Transfer aufgelegt, das weitere Schulen in zwei Wellen jeweils über zwei Jahre an die SINUS-Arbeit heranführte. Zu Beginn des Schuljahres 2003/04 startete das Projekt in 13 Bundesländern mit ca. 800 Schulen. Die zweite Phase startete mit Beginn des Schuljahres 2005/06 und erreichte bis 2007 etwa 1870 Schulen.

$a = 210 \text{ mm}$

$90^\circ$

$b = 297 \text{ mm}$

## **Ansprechpartner**

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand  
Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM)  
Vorsitzender des Vorstands  
Universität Würzburg  
Tel.: 0931 8885091  
E-Mail: weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

### **Kinder rechnen anders**

Prof. Dr. Christoph Selter  
Technische Universität Dortmund  
Tel.: 0231 755-5140 (Skr. -2947)  
E-Mail: christoph.selter@tu-dortmund.de

Gisela Gründl  
Universität Bremen  
Tel.: 0421 218-4826  
E-Mail: gruendl@cevis.uni-bremen.de

### **Mathematik Neu Denken**

Prof. Dr. Rainer Danckwerts  
Universität Siegen  
Tel.: 0271 740-3579 / -3582  
E-Mail: danckwerts@mathematik.uni-siegen.de

### **Mathematik Anders Machen**

Prof. Dr. Jürg Kramer  
Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)  
Mitglied des Vorstands  
Humboldt-Universität Berlin  
Tel.: 030 2093-5815 / -5842  
E-Mail: kramer@mathematik.hu-berlin.de

Prof. Dr. Günter Törner  
Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)  
Mitglied des Vorstands  
Universität Duisburg-Essen  
Tel.: 0203 379-2668  
E-Mail: guenter.toerner@uni-due.de



$a = 210 \text{ mm}$

$90^\circ$

$b = 297 \text{ mm}$

### **Mathekoffer**

Prof. Dr. Hans-Wolfgang Henn  
Technische Universität Dortmund  
Tel.: 0231 755-2939  
E-Mail: wolfgang.henn@math.uni-dortmund.de

Arnold a Campo  
Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und  
naturwissenschaftlichen Unterrichts (MNU)  
Bundesvorsitzender  
Tel.: 02331 880-388  
E-Mail: aCampo@mnu.de

Dietmar Schnelle  
Deutsche Telekom Stiftung  
Tel.: 0228 181-92014  
E-Mail: D.Schnelle@telekom.de

Mehr erfahren Sie auch unter [www.jahr-der-mathematik.de](http://www.jahr-der-mathematik.de).

Der Abdruck ist honorarfrei. Ein Belegexemplar wird erbeten.  
Für weitere Informationen wenden Sie sich bitte an:

### **Redaktionsbüro Jahr der Mathematik**

Christina Vardakis  
Quartier 207  
Friedrichstraße 78  
10117 Berlin  
Tel.: 030 700186-475  
Fax: 030 700186-810  
[vardakis@jahr-der-mathematik.de](mailto:vardakis@jahr-der-mathematik.de)

Julia Kranz  
Quartier 207  
Friedrichstraße 78  
10117 Berlin  
Tel.: 030 700186-741  
Fax: 030 700186-810  
[kranz@jahr-der-mathematik.de](mailto:kranz@jahr-der-mathematik.de)